第 11 講　正弦定理・余弦定理，三角形の面積

PART1　正弦定理

例題

△ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$a=5$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$ のとき　b，R

(2)　$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=120^\circ$ のとき　A，B

(3)　$c=4$，$R=2\sqrt{2}$ のとき，C

Point Pickup

練習

△ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$c=6$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$ のとき　a，R

(2)　$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$ のとき　B，C

(3)　$a=10$，$R=10$ のとき，A

第 11 講　PART1　確認問題

1　△ABC において，外接円の半径を R とする。$b=3$，$A=135^\circ$，$B=30^\circ$ のとき，a，R の値を求めよ。

$a=$ **ア** $\sqrt{\text{イ}}$，$R=$ **ウ**

2　△ABC において，$b=\sqrt{2}$，$c=1$，$C=30^\circ$ のとき，B，A の値を求めよ。

$B=$ **エオ**°，$A=$ **カキク**°

または

$B=$ **ケコサ**°，$A=$ **シス**°

3　△ABC において，外接円の半径を R とする。$a=6$，$R=3\sqrt{2}$ のとき，A の値を求めよ。

$A=$ **セソ**°，**タチツ**°

第 11 講　正弦定理・余弦定理，三角形の面積

PART1　正弦定理

例題

$\triangle$ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$a=5$，$A=30^\circ$，$B=45^\circ$ のとき　b，R

(2)　$b=1$，$c=\sqrt{3}$，$C=120^\circ$ のとき　A，B

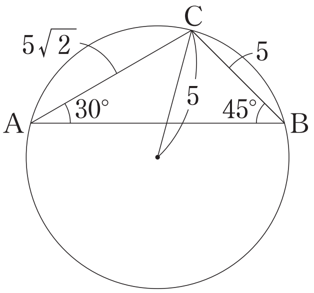
(3)　$c=4$，$R=2\sqrt{2}$ のとき，C

(1)　正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$　　つまり $\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$

よって $b=\dfrac{5}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 45^\circ=5\div\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\cdot 2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}$

また，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ つまり $\dfrac{5}{\sin 30^\circ}=2R$

よって $R=\dfrac{5}{2\sin 30^\circ}=\dfrac{5}{2\cdot\dfrac{1}{2}}=5$

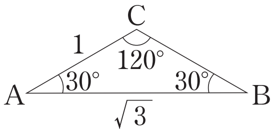


(2)　正弦定理より $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$　　つまり $\dfrac{1}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$

$\sin B=\dfrac{\sin 120^\circ}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

$C=120^\circ$ より $B<60^\circ$　　よって $B=30^\circ$

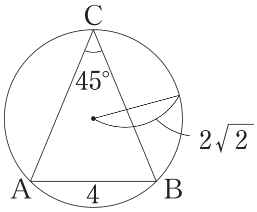
$A=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=30^\circ$

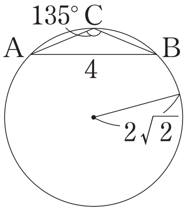


(3)　正弦定理より $\dfrac{c}{\sin C}=2R$　　つまり $\dfrac{4}{\sin C}=4\sqrt{2}$

よって $\sin C=\dfrac{4}{4\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0^\circ<C<180^\circ$ より $C=45^\circ$，135°





練習

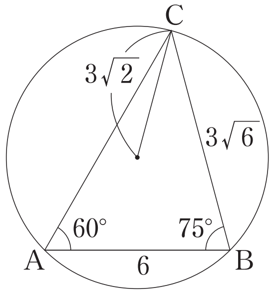
△ABC において，外接円の半径を R とするとき，次のものを求めよ。

(1)　$c=6$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$ のとき　a，R

(2)　$a=2$，$b=\sqrt{6}$，$A=45^\circ$ のとき　B，C

(3)　$a=10$，$R=10$ のとき，A

(1)　$A+B+C=180^\circ$ より $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

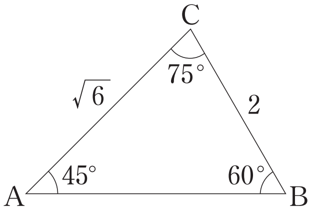


正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$　　つまり $\dfrac{a}{\sin 60^\circ}=\dfrac{6}{\sin 45^\circ}$

よって $a=\dfrac{6}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ=6\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{6}$

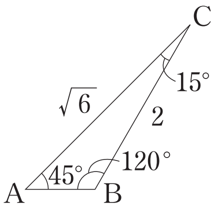
また，正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$ つまり $\dfrac{3\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=2R$

よって $R=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\sin 60^\circ}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=3\sqrt{2}$



(2)　正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$　　つまり $\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sin B}$

$$\sin B=\sqrt{6}\cdot\frac{\sin 45^\circ}{2}=\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$



$A=45^\circ$ より $B<135^\circ$　　よって $B=60^\circ$，120°

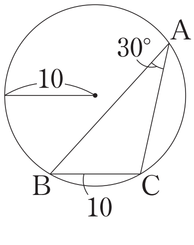
$B=60^\circ$ のとき　$C=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

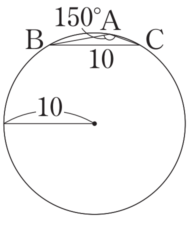
$B=120^\circ$ のとき　$C=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$

(3)　正弦定理より $\dfrac{a}{\sin A}=2R$　　つまり $\dfrac{10}{\sin A}=20$

よって $\sin A=\dfrac{10}{20}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<A<180^\circ$ より $A=30^\circ$，150°





第11講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：2，ウ：3

[解説]

正弦定理より

$$\frac{a}{\sin 135^\circ}=\frac{3}{\sin 30^\circ}$$ [A]

よって

$$a=\frac{3}{\sin 30^\circ}\cdot\sin 135^\circ$$

$$=3\div\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

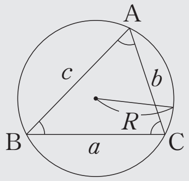
$$=\mathbf{3\sqrt{2}}$$

また，正弦定理より　$\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin 135^\circ}=2R$ [A]

よって $R=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sin 135^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}}=\mathbf{3}$

[A]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とする。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

2

[正解] エオ：45，カキク：105，ケコサ：135，

シス：15

[解説]

正弦定理より

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=\frac{1}{\sin 30^\circ}$$ [B]

$$\sin B=\sqrt{2}\cdot\sin 30^\circ=\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$C=30^\circ$ より $B<150^\circ$

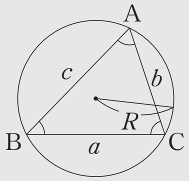
よって　$B=45^\circ,\ 135^\circ$

$B=\mathbf{45}^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=\mathbf{105}^\circ$

$B=\mathbf{135}^\circ$ のとき　$A=180^\circ-(30^\circ+135^\circ)=\mathbf{15}^\circ$

[B]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とする。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

3 **[正解]** **セソ**：45，**タチツ**：135

[解説]

正弦定理より

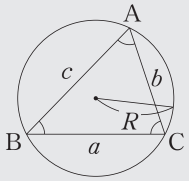
$$\frac{6}{\sin A}=6\sqrt{2}$$ [C]

よって　$\sin A=\frac{6}{6\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0°<A<180°$ より　$A=$ **45°，135°**

[C]　正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とする。



$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$